

Développement: Densité de $DZ_n(\mathbb{R})$ dans $TZ_n(\mathbb{R})$
et de $DZ_n(\mathbb{C})$ dans $TZ_n(\mathbb{C})$. Cayley-Hamilton

Théorème: $DZ_n(\mathbb{C}) :=$ matrices diagona-
nalisables dans $\mathbb{C} / \mathbb{R}$ ISO-152-156
CVA P

$T_n(\mathbb{R}) :=$ matrices triq. dans $\mathbb{R}$.
Alors $\overline{DZ_n(\mathbb{C})} = DZ_n(\mathbb{C})$ et $\overline{DZ_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

Corollaire: Cayley-Hamilton:
 $\forall M \in DZ_n(\mathbb{C}), \chi_M(M) = 0_n$

Preuve du théorème: ① $\overline{DZ_n(\mathbb{C})} = DZ_n(\mathbb{C})$

Soit $M \in DZ_n(\mathbb{C})$. Alors χ_M est scindé donc
 $M \in T_n(\mathbb{C}) = DZ_n(\mathbb{C})$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $M = PTP^{-1}$
T triangulaire

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$ les éléments diagonaux
de T (λ_i distincts).

Soit $\varepsilon > 0$; $T_\varepsilon = T + \text{diag}(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, \frac{\varepsilon}{n})$

On prend $\varepsilon \leq \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$ s'il existe.

Tous les coefficients diagonaux de T_ε sont
distincts: en effet.

Avec $\varepsilon < \delta$: $\lambda_i + \frac{\varepsilon}{r} \neq \lambda_j + \frac{\varepsilon}{s}$

Et pour $i \neq j$, par l'abondance si $\lambda_i + \frac{\varepsilon}{r} = \lambda_j + \frac{\varepsilon}{s}$

Alors $|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{\varepsilon}{r} - \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$
 $\leq \varepsilon \left(1 - \frac{1}{r} \right) < \varepsilon$: absurde.

Donc χ_{T_ε} est scindé à multiplicité algébrique
simple: T_ε est diagonalisable.

Par continuité de $A \mapsto P^{-1}AP$, étant donné
que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T$; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^{-1}T_\varepsilon P = P^{-1}TP = I$

$M \in \overline{DZ_n(\mathbb{C})}$ donc $DZ_n(\mathbb{C}) = \overline{DZ_n(\mathbb{C})}$

② $\overline{DZ_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$ Avec la même méthode

que précédemment $T_n(\mathbb{R}) \subset \overline{DZ_n(\mathbb{R})}$

Réciproquement, montrons que $T_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $DZ_n(\mathbb{R})$

Lemme: $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n .

P scindé sur $\mathbb{R}$ si $\|(\text{Im}(z))\|^n \leq P(z) \ (\forall z \in \mathbb{C})$

① $\exists q \ | \text{Im}(z)|^n \leq P(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$

Une racine de P vérifie $|\text{Im}(z)| = 0$

Donc est réelle donc P scindé sur $\mathbb{R}$.

② $\Rightarrow$ $\exists q \ P$ est scindé sur $\mathbb{R}$: $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$

$$\text{Alors } |P(z)|^2 = \prod_{k=1}^n |z - d_k|^2 = \prod_{k=1}^n |(\operatorname{Re}(z) - d_k)^2 + \operatorname{Im}(z)^2| \\ \geq |\operatorname{Im}(z)|^2.$$

D'où le lemme.

→ A trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si χ_A scinde sur $\mathbb{R}$

si $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |\chi_A(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (lemme)

Donc si $(A_m) \in (\mathcal{L}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tq $A_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A$

Par continuité de $A \mapsto \chi_A$ (justifiée ensuite),

$\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)|^n \leq |\chi_A(z)|$ donc $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$

qui est donc fermé.

Donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})}$

Corollaire: Cayley-Hamilton.

Ilq $\Psi: \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$
 $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue

C'est la composée de $A \mapsto (\chi_A; A)$ et $(P; A) \mapsto P(A)$

→ $A \mapsto (\chi_A; A)$ est polynomiale en les formes

coordonnées: $\det(A - tI_n) = \sum_{k=0}^n P_k(a_{ij}) t^k$

donc par linéarité des formes coordonnées, $\mathcal{C}^0$.

→ $(P; A) \mapsto P(A)$ est C.L. de $A \mapsto A^k$ donc $\mathcal{C}^0$

→ Montrons C.H pour une matrice diagonale D:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_i) \quad \chi_D(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

$$\text{Donc } \chi_D(D) = \prod_{i=1}^n (D - \lambda_i I_n)$$

$\forall i \in [1; n]; [D - \lambda_i I_n]_{i,i} = 0$ donc par produit $\chi_D(D) = O_n$.

→ Si $\Pi \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, $\exists D$ diagonale et $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$
 tq $\Pi = P D P^{-1}$ donc $\chi_D(X) = \chi_\Pi(X)$ det.

$$\text{Ainsi } \chi_\Pi(\Pi) = \chi_D(\Pi) = P \chi_D(D) P^{-1} = O_n.$$

→ Si $\Pi \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, il existe $\Pi_k \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ telle
 que $\Pi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Pi$

Par continuité de Ψ , $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{\Pi_k}(\Pi_k) = O_n \quad \square$.

Conséquences $\mu_n | \chi_n$. Si $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ alors
 $A^{-1} = P^{-1}(A)$